

Tallflyt

Teoretisk bakgrunn

Sven Lindbäck, Morten Nytvedt, Arngeir Skyttermyr

Om Tallflyt

Tallflyt er et digitalt læremiddel i matematikk som tar utgangspunkt i forskning knyttet til automatisering av grunnfunksjoner i matematikk. Metoden og oppgavetyperne som ligger til grunn for *Tallflyt*, er testet ut over flere år i arbeid med en rekke elever som av ulike årsaker strever i matematikk. Metoden er et effektivt verktøy for å finne ut hvilket nivå den enkelte eleven befinner seg på, og hvordan man skal arbeide for å sikre en god utvikling i matematikkfaget.

Teoretisk bakgrunn

Kognitiv overbelastning

I møte med elever som strever i matematikk ser vi at skjevutviklingen starter tidlig. Når vi kartlegger elever som er i ferd med å avslutte skoleløpet, oppdager vi svært ofte at en rekke grunnfunksjoner ikke er automatisert. Dette er uavhengig av om elevens vansker er generelle og gjelder alle fag, om de er mer spesifikke for matematikk, eller om de primært har bakgrunn i elevens skolehistorikk og mangler i opplæringen.

Matematikk er et helhetlig symbolspråk som er knyttet til håndtering av mengder, tallbehandling og tallsystemer. Faget har sin indre logikk der hvert tematiske område, som algebra, geometri, mål og vekt, statistikk og funksjoner, bygger på flere grunnleggende områder.

Ut fra dette forstår man at øving på ferdigheter som ikke bygger på det man kan fra før, vil bli isolert fra det helhetlige matematiske systemet.

Omfanget og kvaliteten på elevenes matematiske forkunnskaper vil variere enormt. Det er derfor vanskelig å avgjøre hvor man skal sette inn støtet når elever strever med matematikk. I mange tilfeller vil læreren overvurdere elevens ferdigheter og enten gi flere oppgaver som er litt for vanskelige, eller begynne for raskt på neste nivå. I begge tilfellene vil det føre til kognitiv overbelastning, og systemet bryter sammen.

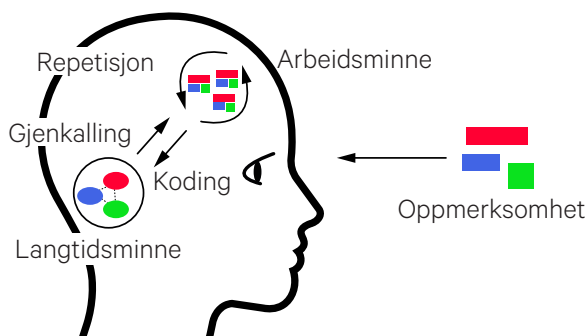
En sentral årsak til kognitiv overbelastning i møte med matematikk er altså at eleven ikke har tilstrekkelig automatiserte grunnferdigheter, og at oppgavene ikke knyttes til det som er lært fra før.

Alt læringsarbeid bygger på et velfungerende arbeidsminne. Arbeidsminnet er en slags arbeidsbenk for all informasjonsbearbeiding, problemløsning og tenkning. Arbeidsminnet har svært liten kapasitet og svært kort varighet. Skal man ta til seg og bearbeide større mengder informasjon, må arbeidsminnet og langtidsmminnet samarbeide (ill. s. 2).

Når man automatiserer grunnfunksjonene, utvider man ikke selve kapasiteten til arbeidsminnet, men setter det i stand til å bearbeide større enheter gjennom bruk av langtidsmminnet og gjør det mer funksjonelt i den lærings-situasjonen eleven befinner seg i.

Det som kjennetegner elever med gode matematikkferdigheter, er at de har strukturert og lagret kunnskaper og ferdigheter på en hensiktsmessig måte (Geary 1993). Elever med svake matematikkferdigheter har kvalitativt dårligere organiserte kunnskapsstrukturer enn elever med gode matematikkferdigheter (Ostad 1999).

Langtidsminnet kan utnyttes ved at man hele tiden bygger på det eleven kan, setter ny kunnskap inn i en meningsfull kontekst, følger en systematisk og tilpasset progresjon og sørger for at eleven opplever mestring og motivasjon. For at eleven skal kunne etablere hensiktsmessige strukturer i langtidsminnet, må han/hun få nødvendig mengdetrening i den nærmeste utviklingssonen og samtidig få tid for overlæring av allerede etablerte ferdigheter.



Regneferdighetene i matematikk bygger på at elevene koder tall og mengder inn i ulike systemer som fungerer parallelt.

Matematikkferdighet er delvis en visuell ferdighet som bygger på forståelsen av tallinjer, størrelsesforhold og geometriske figurer. Ferdigheten er også delvis språklig ved at vi setter ord på tall når vi teller og regner, og den er delvis en vurdering av mengder.

Innkoding og gjenhenting innenfor disse ulike systemene og forbindelsen mellom kodene er kritiske faktorer i elevenes utvikling av regneferdigheter og videre ferdigheter i matematikk. Problemet er ofte at eleven prøver å automatisere en ferdighet før han/hun har det strukturelle mønsteret som kreves for å kode informasjonen funksjonelt. For eksempel vil øving på tiervenner være lite effektivt for en elev som strever med telling, og som har uklar koding av tallsymbol og mengde. Da vil øvingen være ren pugg som, selv om det repeteres ofte, svært ofte være glemt i løpet av noen timer. Læringen knyttes da kun til språklige koder og visuelle koder som ikke er koblet til det numeriske systemet (se s. 4).

Begrepet tallflyt

Begrepet *tallflyt* defineres her som automatiserte ferdigheter knyttet til grunnleggende tallbehandling innenfor områdene telling, gjenkjenning av mengder og de fire regneartene. Tallflyt er selve motoren i all oppgaveløsning i matematikk. God tallflyt letter presset på det kognitive systemet og sørger for kapasitet til matematisk problemløsning og tenkning.

Tallflyt er beslektet med det man i internasjonal litteratur kaller *number sense – tallfølelse*. Det har de siste ti årene blitt avdekket at elever som strever med matematikk, har manglet knyttet til nettopp *tallfølelse* (Butterworth 2010). Manglene viser seg blant annet som usikre telleferdigheter og usikker mengdeoppfattelse og tabellkunnskap. Tallfølelse kan defineres som vår intuitive forståelse av tall, telling, mengder og relasjoner mellom tall og mengder. Dette er en evne som ofte har vist seg uavhengig av lærte matematikkferdigheter. Mange forskere ser på den som en medfødt evne som bestemmer hvor lett man har for å lære seg matematikk (Dahane 1997).

Tallfølelse kan defineres gjennom åtte ulike delfunksjoner som er nødvendige for å kunne tilegne seg matematisk kompetanse:

1 Intuitiv oppfattelse av mengde

Intuitiv oppfattelse av mengde eller *approximate number system* (ANS) dreier seg om å avgjøre mengden i mindre grupper (mengder opp til 5–6), sammenligning av mengder og diskriminering mellom mengder.

Mange regner denne ferdigheten som selve grunnlaget for kalkulering og læring av matematikk (Butterworth 1999, Dehane 1997).

En elev med god intuitiv oppfattelse av mengde vil ha lettere for å forstå matematikk enn en elev som ikke har den intuitive oppfattelsen.

2 Telleferdigheter og forståelsen av kardinal- og ordinalprinsippet

Ordinalprinsippet handler om forståelsen av tallremsen, altså at et bestemt tall er et ledd i en rekkefølge (1, 2, 3, 4 ... osv.), og at det kan defineres langs en tallinje.

Kardinalprinsippet innebærer at det siste tallet

som telles, representerer antallet eller mengden (i tallrekka 1, 2, 3, 4 representerer tallet 4 den totale mengden eller antallet *fire*).

3 Symbolsk koding av det numeriske systemet

Dette innebærer at eleven har en forståelse av at tall er symboler som representerer ulike typer mengder.

4 Forståelse for antallsendringer

Dette innebærer at eleven forstår at en mengde blir større dersom man legger til én eller flere enheter (addisjon), og mindre når man tar bort én eller flere enheter (subtraksjon).

5 Et kunnskapslager av tallfakta

Tallfakta er automatisert, og eleven kan prosessere dem uten bruk av kognitive ressurser. Viktigste her er addisjon og subtraksjon i tallområdet 1–100 og den lille multiplikasjonstabellen.

6 Forståelse av tallmønstre

Eleven kan vurdere ulike sekvensielle mønstre i tallrekker slik som 2, 4, 8, 16 ... (hva er neste tallet i rekka?).

7 Vurdering av størrelse og lengde

Eleven forstår at lengder og størrelser kan representeres i et tallsystem.

8 Forståelse av titallsystemet

Eleven forstår plassverdi og at tallene kan representeres på en tallinje.

I læremiddelet *Tallflyt* er delfunksjonene 1–6 hovedkomponentene. Delfunksjonene 7 og 8 blir behandlet indirekte.



Der tallfølelse knyttes til kvaliteten av ferdigheter, vil begrepet tallflyt også inneholde en tidsvariabel som sikrer effektiviteten av ferdighetene. Hvor lang tid eleven bruker på operasjoner innenfor de åtte delfunksjonene, har stor betydning når han/hun skal sette sammen disse ferdighetene til mer komplekse matematiske aktiviteter.

Hvor raskt og uanstrengt eleven behandler delfunksjonene, er derfor synonymt med det vi definerer som tallflyt.

Hvordan styrke tallflyten?

Mange elever møter ofte altfor komplekse oppgaver før de har automatisert delfunksjonene som inngår i begrepet tallflyt.

Manglende mestring i faget fører ofte til at elevene opplever at de er dumme og ikke har noe talent for matematikk. Matematikkopplæringen for disse elevene blir svært anstrengende og fører til at det kognitive systemet stadig overbelastes, med påfølgende motivasjonsproblemer og matematikkvegring. I slike tilfeller er det svært viktig å gå tilbake og jobbe mer grundig og på en annen måte for å styrke de grunnleggende forutsetningene for videre utvikling i matematikk. Erfaringer viser at dette i liten grad blir gjort på en systematisk måte. Progresjonen følger ofte andre hensyn enn nivået den enkelte eleven befinner seg på.

Distribuert læring – hvordan øve?

Alle profesjonelle fiolinister øver på skalaer hver dag – selv om de kan spille Paganini med stor kunstnerisk innlevelse. Gjentatt øving av grunnteknikken gir fiolinisten et skjerpet musikalsk redskap som kan benyttes kunstnerisk. Dersom fiolinisten slurver med øvingen, vil han/hun aldri nå et høyt nivå – uansett hvor stort talentet i utgangspunktet er. Slik er det med all læring, også matematikk. Automatisering av grunnferdigheter i regning er helt nødvendig for å kunne løse mer avanserte problemer. Disse ferdighetene blir vedlikeholdt naturlig hos dem som ofte foretar ulike beregninger i ulike situasjoner, men alle elever, uansett forutsetninger, vil tjene på å trene gjentatt og systematisk på grunnferdighetene i matematikk.

Øvelser og repetisjoner som gjennomføres tilfeldig og usystematisk, vil ikke føre til automatisering. Kurs for å få «gangesertifikat» kan være et eksempel på dette. Selv om et slikt opplegg kan fremstå som systematisk, har det en rekke fallgruver: Har eleven forkunnskapene som trengs? Er øvingen avgrenset nok? Har eleven tilstrekkelig tempo og mange nok riktige svar før

han eller hun går videre? Klarer eleven å fremkalle ferdighetene noen dager etter øving? Erfaring viser at elever ofte øver seg på multiplikasjon i en avgrenset periode. Varigheten på kurset er fastsatt på forhånd, og det avsluttes med en gangeprøve og påfølgende sertifikat. De svakeste elevene klarer bare nesten å automatisere ferdighetene før neste tema introduseres, og så går det gjerne et helt år til neste gangkurs. Da må disse elevene starte helt på nytt med automatiseringsarbeidet. Året etter har læreren gjerne en forventning om at elevene kan fremkalle innlærte ferdigheter fra året før, og øker tempoet i øvingen.

Full automatisering tar tid å oppnå, uansett evner og forutsetninger. Med dette i tankene kan det være fristende å legge opp til lange arbeidsøkter med mange repetisjoner, slik at elevene hurtig får etablert nødvendige ferdigheter. Studier fra læringspsykologien viser imidlertid at denne formen for læring ikke er særlig effektiv. I tillegg kan det være svært tungt å motivere elevene til repetisjon over lengre tid. Forskning indikerer at det mest effektive er å distribuere læringen over mange korte økter og med fokus på avgrensede oppgaver (Baddely m.fl. 2015). Dette gjør det også lettere å motivere elevene til automatiseringsøvelser.

Hvor mange repetisjoner en elev trenger, vil variere. Noen klarer seg med få repetisjoner, mens andre trenger svært mange repetisjoner. Hver repetisjon eleven gjør, vil føre til at forbindelsen i kodingen styrkes og gradvis øker i kvalitet og hurtighet. Nøyaktigheten og tempoet i gjenkallingen er en funksjon av antall repetisjoner og gjenkallinger (jmf. ill. s 3).

Det er særdeles viktig at oppgavene som elevene jobber med, er på riktig nivå, og at det jobbes systematisk. Hvis man bruker for liten tid på repetisjoner på riktig nivå, vil det føre til at eleven raskt stopper opp i utviklingen. Vanskene er ofte knyttet opp til for lite effektiv behandling av relativt enkle tall. Elever som har svak tallflyt, vil ha behov for lengre tid på hver oppgave og mer øving på hvert enkelt utviklingstrinn.

Enhver matematikkoppgave består av en rekke grunnfunksjoner som mange elever har automatisert i ulik grad. En elev kan ofte forklare og

løse hver enkelt delkomponent isolert, men hvis eleven må bruke tid og oppmerksomhet på flere ferdigheter samtidig, er faren stor for at han/hun ikke mestrer noen ting. Dette ser vi ofte i arbeid med enkeltelever. Eleven kan vise god flyt i arbeidet med et spesifikt tema, men hvis et element legges til, ser det plutselig ut som om eleven ikke har forstått noen ting av det han/hun har øvd på. Feilsvar kan ofte virke helt uforklarlige når man overbelaster eleven.

Oppgavene må være finmasket nok og knyttet til det eleven kan fra før, for å få til god utvikling, ellers vil arbeidsminnet og oppmerksomheten bryte sammen i møtet med læringsoppgavene. Har man en elev som strever med matematikk, vil man gjerne hjelpe eleven hurtig opp på det øverste nivået hans/hennes. På dette nivået mestrer eleven, kanskje med litt hjelp, noen få oppgaver, men når eleven skal jobbe selvstendig med øvingen, er han/hun allerede utslitt og mestrer ikke flere oppgaver på det gitte nivået. Vi kan tenke oss en vektløfter som vil øke antall kilo han/hun klarer å løfte i benkpress. Dersom maksvekten legges på for fort, vil vektløfteren klare bare én repetisjon på en god dag. Slitasjeskader og en solid knekk i motivasjonen vil raskt inntreffe når forventet progresjon uteblir. Hvis vektløfteren derimot reduserer vekten med en del kilo, kan antall repetisjoner økes betraktelig. Dersom vektløfteren legger opp en nøye plan for progresjon uke for uke, vil evnen og motivasjonen til å øke egen maksvekt være innenfor rekkevidde. Slik må man også jobbe med automatiseringsarbeidet for å oppnå god og varig tallflyt.

Motivasjon

I forbindelse med automatiseringsarbeid spiller forventning om mestring en sentral rolle (Bandura 1986) for å opprettholde motivasjonen. *Tallflyt* legger opp til oppgaver med finmasket progresjon av vanskegrad hvor elevene alltid vil mestre, men stadig øker tempoet, og hvor neste utfordring alltid er i elevenes nærmeste utviklingszone.

Elever som overvurderer egne evner, vil fort søke utfordringer som er langt vanskeligere enn de kan mestre. De vil gjerne komme opp

i gjentatte ubehageligheter som følge av urealistisk forventning om mestring. Elever som har for lav forventning om mestring, vil heller søke oppgaver som er for lette, og de får derfor ikke utnyttet potensialet sitt.

Hjernen søker forståelse, og dersom elevene forstår oppgavene som blir gitt, samtidig som de opplever dem som relevante, vil dette medvirke til å øke den indre motivasjonen. Deci og Ryan (1985) hevder at elever som drives av indre motivasjon, vil søke langt mer utfordrende oppgaver enn elever som drives av ytre motivasjon. Det er vanskelig å motivere en elev til å øve på noe han/hun ikke fullt ut forstår eller mestrer.

Flyt i matematikkopplæringen kjennetegnes av at elevene har dyp involvering i aktivitetene. Når utfordringene er interessante og i godt samsvar med ferdighetene, vil eleven oppleve flyt i læringen (Csikszentmihalyi 1975).

I begynneropplæringen er denne typen flyt nært knyttet til elevenes mestring av de grunnleggende ferdighetene i faget. Hvor godt elevene mestrer det grunnleggende, har svært stor innvirkning på elevenes motivasjon i faget gjennom hele skoleløpet.

Organisering

Trening av tallflyt bør skje i avgrensede økter. Det bør helst settes av tid til to korte økter daglig hvor elevene repeterer regneoppgavene som skal automatiseres. Dette kan gjøres i full klasse og bør inngå i den daglige rutinen. Forskning viser at jo mer aktivt man bearbeider læringstoffet i innkodingfasen, jo lettere har man for å gjenkalle informasjon. For å sørge for at eleven har aktiv oppmerksomhet i innkodingen anbefales korte økter på 5-10 minutter.

Det er viktig å legge opp en undervisningspraksis som sørger for å avgrense læringsoppgavene på en slik måte at alle elevene får nok trening på grunnferdighetene. Det ideelle er om skolen skiller ut automatiseringen av grunnferdigheter i matematikk, slik det blir gjort i leseopplæringen. I leseopplæringen er det en egen bevissthet om at man må jobbe med avkoding og leseforståelse som to parallelle, men nødvendige og integrerte komponenter for å oppnå god leseflyt. Det er med andre ord også to gjensidige

avhengige «stier» til matematikk mestring. Den ene dreier seg om automatisering av tallflyt. Den andre dreier seg om utvikling av matematiske kunnskaper og ferdigheter som er nødvendige for å mestre de matematiske hovedområdene i læreplanen og matematisk problemløsning.

Litteratur

- Baddeley, A.D. (1986). *Working Memory*. New York: Oxford University Press
- Baddeley, A.D., Eysenck, M. og Anderson, M.C. (2015). *Memory*, 2 utg., Psychology Press
- Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The Exercise of Control*. New York: Freeman
- Butterworth B (2010). *Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia*. Trends Cognitive Science 14: 534–541.
- Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain*. London: Macmillan
- Govoni, R., Naveh-Benjamin, M. og Anderson, N.D. (1996). «*The effects of divided attention on encoding and retrieval processes in human memory*». Journal of Experimental Psychology: General, 125, 159–180
- Csikszentmihalyi, M. (1975). *Beyond Boredom and Anxiety: Experiencing Flow in Work and Play*, San Francisco: Jossey-Bass
- Dahaene, S. (1997). *The Number Sense*. New York: Oxford University Press
- Deci, E.L. og Ryan, R.M. (1985). *Intrinsic Motivation and Self-determination in Human Behavior*. New York: Plenum Publishing Co.
- Geary, D.C. (1993). «*Mathematical Disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components*». Psychological Bulletin, 114, 345–362.
- King, G. og Bay-Williams, J.M. (2014). *Assessing basic fact fluency*. *Teaching Children Mathematics*, 20(8), 488–497
- Ostad, S.A. (1999). *Elever med matematikkvansker. Studier av kunnskapsutviklingen i strategisk perspektiv*. Oslo: Unipub forlag

Tallflyt –teoretisk bakgrunn

Sven Linbäck, Morten Mytvedt, Arngeir Skyttermyr

© 2019 GAN Aschehoug, H. Aschehoug & Co.

(W. Nygaard), Oslo

ISBN 978–82–492–1988–9

1. utgave / 1. opplag 2019

Redaktør: Tina Tofte

Digital konsulent: Alistair Frank Spalding

Digital utvikling: ExTransit, Sverige

Grafisk tilrettelegging: GAN Aschehoug

Illustrasjoner: © Shutterstock

Tallflyt er utviklet med støtte fra Utdanningsdirektoratet.

Alle henvendelser om forlagets utgivelser kan rettes til:

GAN Aschehoug

Postboks 363 Sentrum

0102 Oslo

E-post: forlag@gan.aschehoug.no

www.gan.aschehoug.no

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med GAN Aschehoug er enhver eksemplarfremstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og inndragning, og kan straffes med bøter eller fengsel.